

(微分方程式による) 自然・社会現象のモデリング

科学の方法

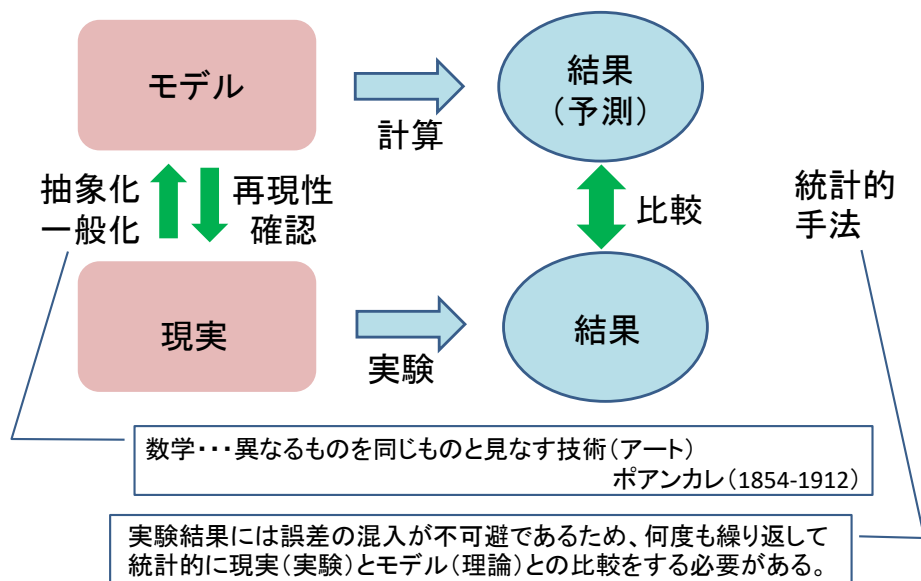
モデル化

- 解析(自然法則の多くは、微分方程式で表される)
- シミュレーション
- CAE (Computer-aided Engineering)

例: 人口予測
放射性炭素による年代測定
力学的運動

- 意思決定のモデル(ゲーム理論)

科学におけるモデル化手法



自然科学におけるモデル化(1)

現実の複雑な問題を、ある仮定の下に単純化して、
数学の問題に置き換える。

リンゴの足し算(加法)



リンゴはあわせていくつ?

➔ $3 + 2 = 5$

「リンゴ」を離れた
一般化・抽象化

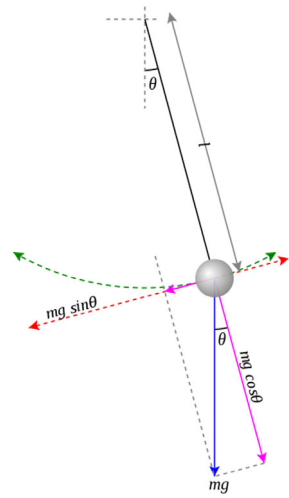
ビルの揺れ(力学)



弾性定数、固有振動数等

記述したい現象について
の本質的な量は何か?
単純化による特徴抽出

自然科学におけるモデル化 (2)



$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

↓ $\sin \theta \sim \theta$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

自然科学におけるモデル化 (2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$T = 1 \text{ sec}$ となるようなひもの長さ l ?

→ $l = \frac{g}{4\pi^2} \sim 25 \text{ cm}$

ガリレオによる
振り子の等時性の発見
(1584年頃)

いつ、どこで、誰がやっても
成り立つ普遍的な法則

現象の本質を捉えたモデル
である、ということ。

自然科学におけるモデル化 (3)

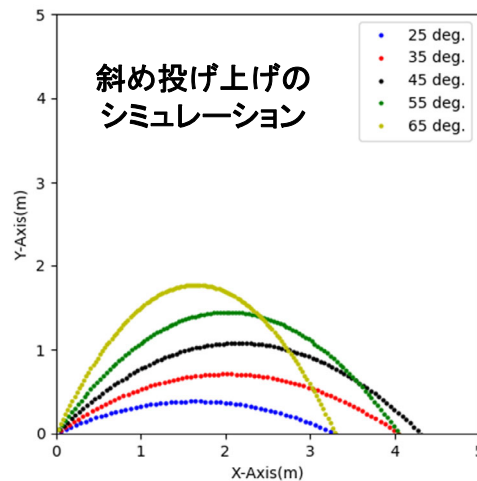
微分方程式

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

↓

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}, \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$$

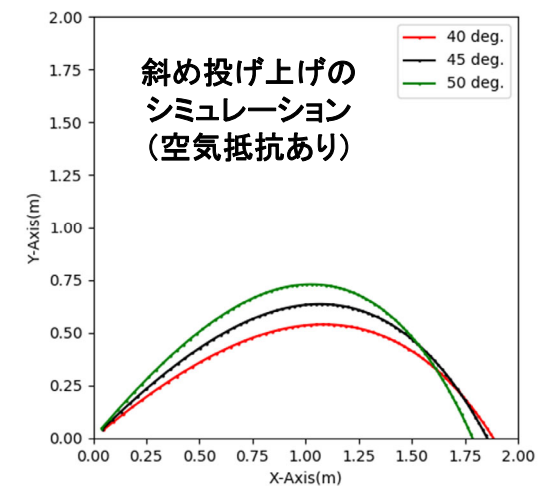
$$\begin{aligned} v_x &+= a_x * dt \\ v_y &+= a_y * dt \\ x &+= (v_x - a_x * dt / 2) * dt \\ y &+= (v_y - a_y * dt / 2) * dt \end{aligned}$$



自然科学におけるモデル化 (3)

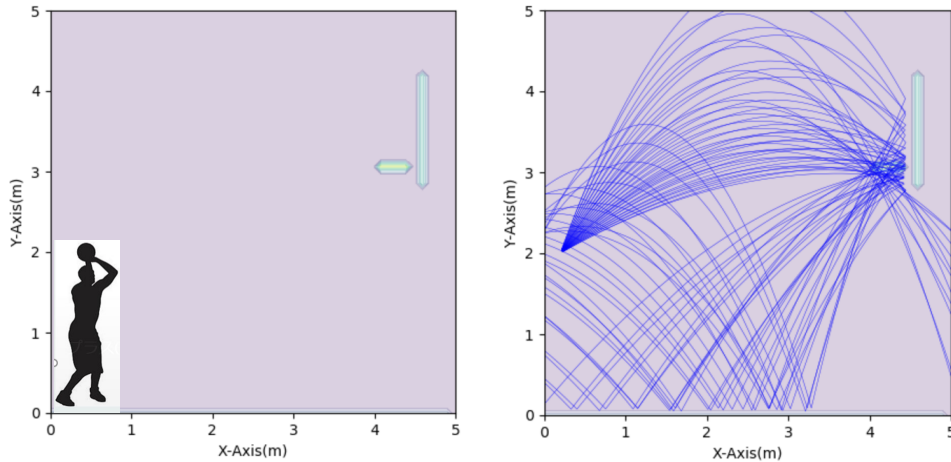
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x, \quad m \frac{dv_x}{dt} = -\mu |v| v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -\mu |v| v_y - g \end{aligned}$$

速度の2乗に比例する
空気抵抗を考慮



自然科学におけるモデル化 (3)

例: フリースロー(バスケット)のシミュレーション
(高さ=2m、ゴールまでの水平距離=4m)



自然科学におけるモデル化 (4)

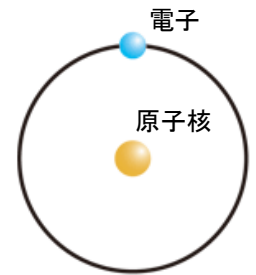
$$E = -\frac{1}{n^2} \text{ Bohr}$$

$$E = -\frac{1}{n^2} - \frac{4n-3}{4n^2} \alpha^2 - \frac{2n^3 + 6n^2 - 12n + 5}{8n^6} \alpha^4 \dots$$

Bohr & Schrödinger & Dirac

$$E = \left(-\frac{1}{n^2} - \frac{4n-3}{4n^2} \alpha^2 - \frac{2n^3 + 6n^2 - 12n + 5}{8n^6} \alpha^4 \right) \frac{1}{1 + m_e/m_p} + \left(\frac{1}{n^4} \alpha^2 - \frac{4n-3}{8n^6} \alpha^4 + \frac{8n^3 + 40n^2 - 72n + 29}{64n^6} \alpha^6 \dots \right) \frac{m_e}{m_p} \frac{1}{(1 + m_e/m_p)^3}$$

Bohr & Schrödinger & Dirac & recoil



自然科学におけるモデル化 (4)

さらにさらに・・・

Bohr & Schrödinger & Dirac & recoil & relativistic recoil & self energy & vacuum polarization & two-photon corrections & three-photon corrections & radiative recoil corrections & nuclear self energy and polarizability & nuclear size

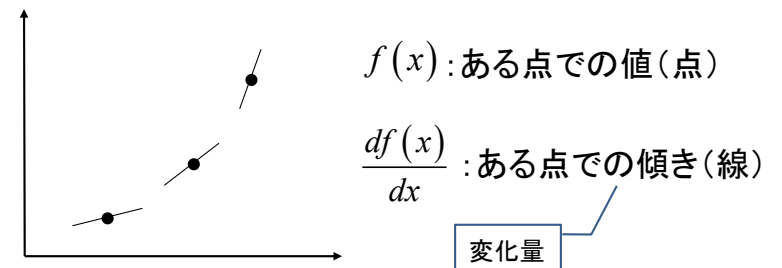
P. Mohr *et al.*, Rev. Mod. Phys. **88**, 035009 (2016).
M. Horbatsch and E. A. Hessels, Phys. Rev. A **93**, 022513 (2016).
M. Eides *et al.*, Theory of Light Hydrogenic Bound States, Springer 2007

Modelを精密化することで、真の姿に近づいていくが・・・

自然・社会と微分方程式

社会科学を含む、世の中で見られる様々な現象は、ある量の瞬間での値(点)だけではなく、**変化量(傾き)を含む**、(そこから産み出される複雑怪奇な現象に比べて)**簡単な関係式**として理解されることが非常に多い。

時間、あるいは空間の変化に対する**変化量**を含む方程式を、一般に微分方程式という



自然・社会と微分方程式

波動(赤外線、wifi、地震動)、振動(共鳴)、増幅・減衰、拡散(汚染、噂・・・)、伝導、回路、天体、化学反応、人口モデル、気象予測(流体)、伝染病、個人消費行動、種の相互作用、金融商品開発、渋滞予測・・・

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0$$

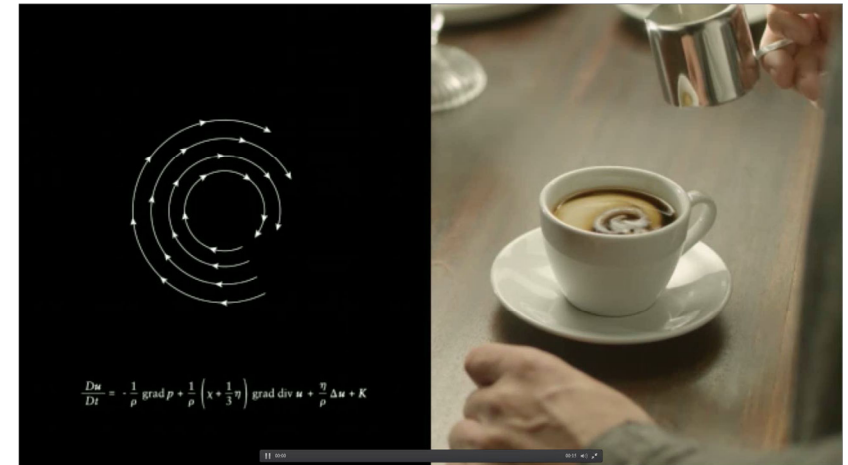
$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

自然・社会と微分方程式



© BRIDGESTONE <https://www.bridgestone.co.jp/corporate/cm/>
あなたと、つぎの景色へ

ナビエ・ストークス方程式、波動方程式、黄金比、Keplerの第3法則、転がり摩擦、空気抵抗

成長・減衰を記述するモデル

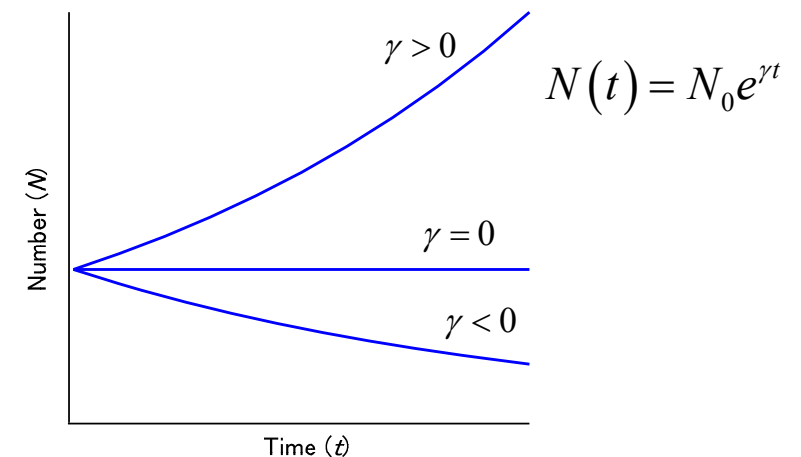
$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t)$$

以下のモデルを例として考える

1. 人口モデル
2. 年代測定法

微分方程式 $\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t)$ の解曲線

$N(t)$ が時刻 t における数であるとすれば、



指数関数の性質

解: $N(t) = N_0 e^{\gamma t}$ (指数関数)

指数関数 e^t の性質

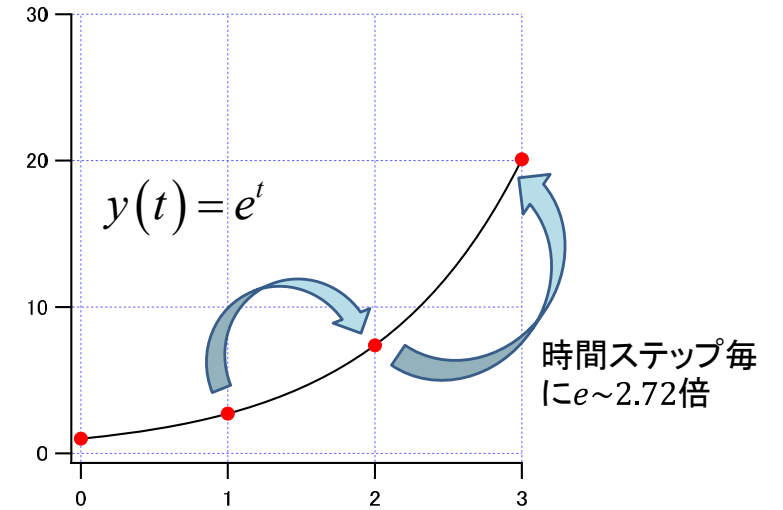
$$\frac{d}{dt} e^t = e^t$$

傾きが、それ自身の値に等しい

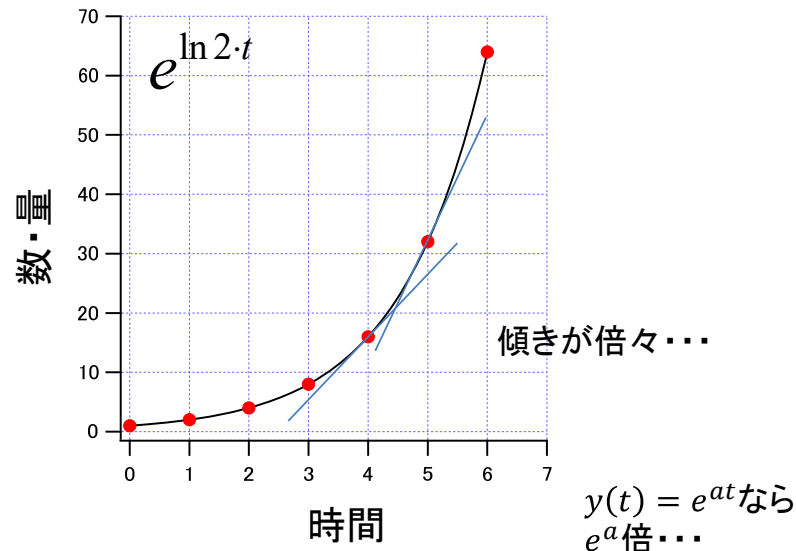
ある時刻での傾き ある時刻での値

数学がいかに自由で変幻自在な学問でも、これを満たす数値は e しかない!

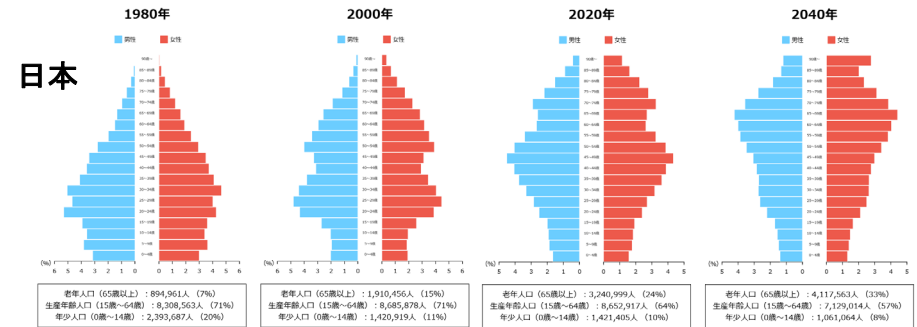
指数関数の性質



例: ねずみ算・複利計算 etc.



人口論 人口=国の最も基本的な指標の1つ



つぼ型



棺桶型

人口論

上手いモデルを用いて将来人口を予測したい。

マルサス(1766-1834: 英)人口論(1798年)中のアイディア

$N = N(t)$ を、ある時刻 t における、ある国の総人口とする。

短い時間区間 dt における出生数と死亡数は、ともにその時点の人口と時間区間に比例する。すなわち、

$$\text{出生数} = \alpha N dt \quad \text{死亡数} = \beta N dt \quad \alpha, \beta: \text{定数}$$

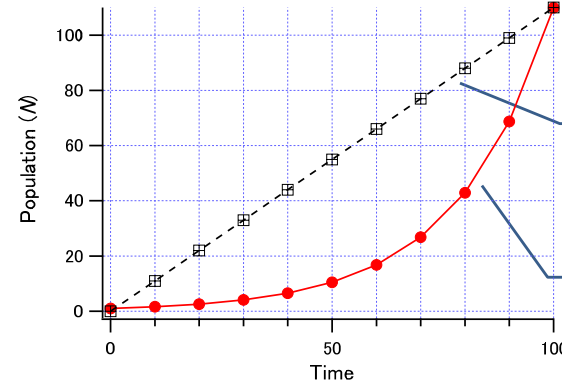
よって、時間区間 dt 内の全人口の増加 dN は、

$$dN = \alpha N dt - \beta N dt = (\alpha - \beta) N dt = \gamma N dt \quad \text{となる。}$$

両辺を dt で割れば、

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \quad \text{が導かれる。}$$

科学の方法



傾き(勾配)が、どの瞬間でも等しい(定数)

$$\frac{dN(t)}{dt} = c \quad \text{定数} \quad (c > 0)$$

傾き

傾き(勾配)が、ある瞬間の値に比例する

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t)$$

傾き ある時刻での値

各点での傾き $= \gamma N$ であり、比例係数 γ が大きいほど急激に成長(増大)する

人口論

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t)$$

$t=0$ で $N = N_0$ ならば、

$$N(t) = N_0 e^{\gamma t} \quad \text{が解。}$$

マルサスの人口モデル

$t=0$ を、1790年に対応させる。

$$N_0 = 3.9 \times 10^6$$

時間区間を10年にとると、 $t=1$ 、即ち1800年においては、

$$N(1) = 3.9 \times 10^6 \times e^{\gamma} = 5.3 \times 10^6$$

$$\rightarrow \gamma = \log\left(\frac{5.3}{3.9}\right) = 0.307$$

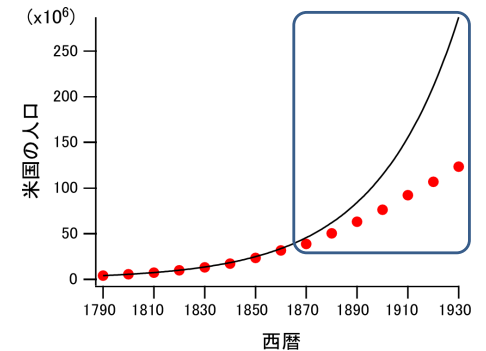
年度	米国の人口 (百万人)	予測値 (百万人)
1790	3.9	
1800	5.3	
1810	7.2	
1820	9.6	9.8
1830	12.9	13.3
1840	17.1	18.1
1850	23.2	24.6
1860	31.4	33.4
1870	38.6	45.5
1880	50.2	61.8
1890	62.9	84.0
1900	76.0	114.2
1910	92.0	155.2
1920	106.5	211.0
1930	123.2	286.9

人口論

1870年辺りから、ズレが大きくなる。

仮定を振り返る:

このモデルでは食糧資源/エネルギーの不足や人口過密、その他環境的要因など、人口増加を抑制する因子を全く考慮していない。



1837年、フェルフルスト(蘭)はマルサスモデルに対し、人口過密の要因を考慮した修正モデルを提案。

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)$$

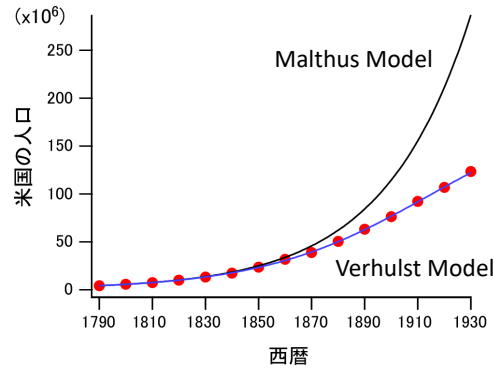
人口に上限 (N_∞) を導入した。

$$\text{解は、} N(t) = \frac{N_\infty}{1 + \left[\left(\frac{N}{N_\infty}\right) - 1\right] e^{-\gamma t}}$$

フェルフルストの人口モデル

人口論

年度	米国の人口 (百万人)	Malthusモデル (百万人)	Verhulstモデル (百万人)
1790	3.9		
1800	5.3		
1810	7.2		
1820	9.6	9.8	9.7
1830	12.9	13.3	13.0
1840	17.1	18.1	17.4
1850	23.2	24.6	23.0
1860	31.4	33.4	30.2
1870	38.6	45.5	38.1
1880	50.2	61.8	49.9
1890	62.9	84.0	62.4
1900	76.0	114.2	76.5
1910	92.0	155.2	91.6
1920	106.5	211.0	107.0
1930	123.2	286.9	122.0



2つのモデルについて左のグラフと上のグラフの持つ情報は同じだが、表だけでは全体的なイメージをつかみにくい。必ずグラフを描いて考えてみることに。

$\gamma < 0$ の場合、
減衰する現象を記述する。



縄文遺跡は卑弥呼の墓との説がある。香取古墳などで構成する（奈良県桜井市、写真上）。縄文遺跡で見つかったモモの種

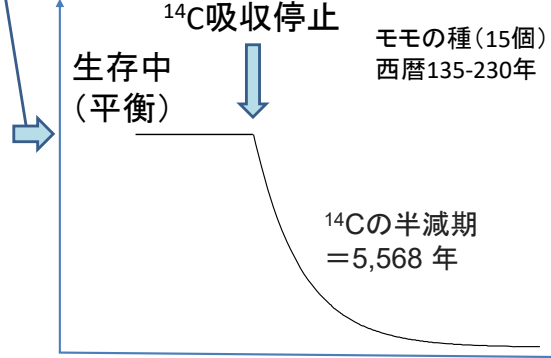


奈良・縄文遺跡出土の桃の種 卑弥呼と同年代 畿内説を補強か

邪馬台国の場所新材料

邪馬台国の有力候補地とされる奈良県桜井市の縄文遺跡（遺跡）で出土したモモの種を放射線炭素年代測定したところ、西暦135-230年と推定された。これは、卑弥呼の没したと推定されている西暦180年以前に、邪馬台国に存在したと推定される。奈良県立総合研究機構の佐藤雅之氏らが、同県桜井市にある縄文遺跡で出土したモモの種を放射線炭素年代測定したところ、西暦135-230年と推定された。これは、卑弥呼の没したと推定されている西暦180年以前に、邪馬台国に存在したと推定される。奈良県立総合研究機構の佐藤雅之氏らが、同県桜井市にある縄文遺跡で出土したモモの種を放射線炭素年代測定したところ、西暦135-230年と推定された。これは、卑弥呼の没したと推定されている西暦180年以前に、邪馬台国に存在したと推定される。

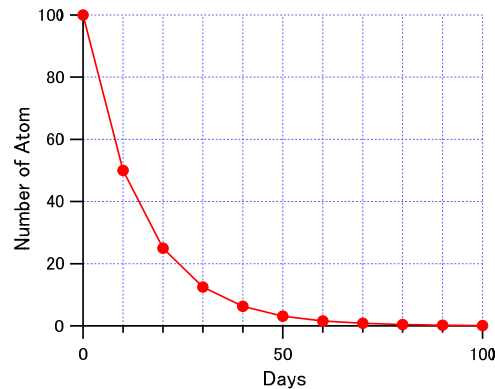
地球に降り注ぐ中性子線量で決まる値



減衰のモデル

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t), \gamma < 0$$

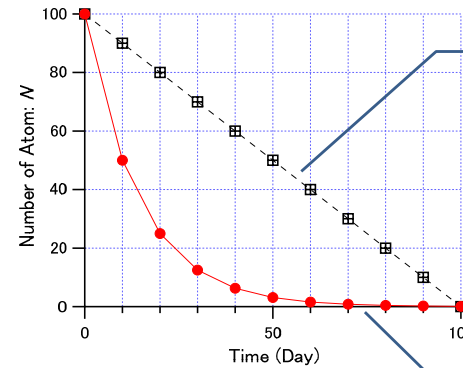
グラフを描いてみる



想定：
最初(t=0)で100個あったものが、時間ステップ(ここでは10日)毎に半減する。

放射性元素でいえば、半減期(τ)が、10日ということ。

減衰のモデル



傾き(勾配)が、どの瞬間でも等しい(定数)

$$\frac{dN(t)}{dt} = c \quad \text{傾き} \quad (c > 0)$$

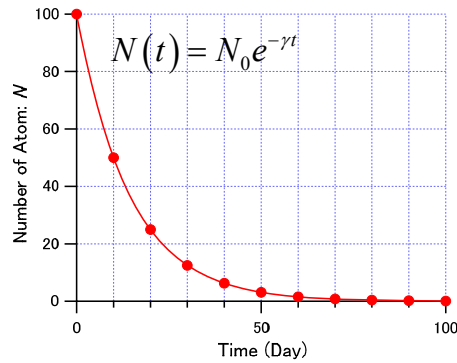
傾き(勾配)が、ある瞬間の値に比例する

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t) \quad \text{傾き} \quad \gamma > 0$$

単位時間に崩壊する放射性元素の原子数は、その瞬間の放射性元素の原子数に比例する

比例係数 γ は、元素により異なる値をとるが、上のグラフから大きな値ほど速く崩壊する

減衰のモデル



傾き(勾配)が、ある瞬間の値に比例する

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\gamma N(t), \quad \gamma > 0$$

ある時刻での値

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\text{半減期}} = \frac{\ln 2}{10} \approx 0.07 \text{ /day}$$

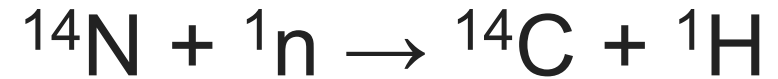
$$\left[\begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = -\gamma N \quad \rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\gamma t} \\ \text{半減期}(\tau) \text{で半分}(\frac{N_0}{2}) \text{になるので、} \\ \frac{1}{2} = e^{-\gamma \tau} \quad \therefore \gamma = \frac{\ln 2}{\tau} \end{array} \right]$$

1日で、今ある元素の約7%が崩壊する、ということ

放射性炭素による年代測定

炭素原子は、陽子6個、中性子6個からなる ^{12}C が安定だが、わずかにそれ以外の中性子数で構成されるものも含まれる。

宇宙線によって生成する中性子が窒素原子と反応すると、

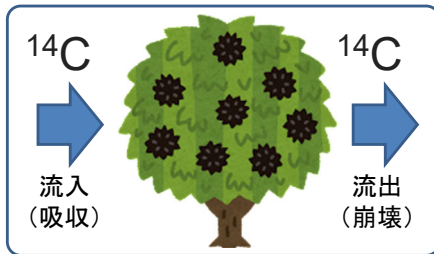


$$(7,7) + (0,1) \rightarrow (6,8) + (1,0)$$

によって放射性元素 ^{14}C が生成する。

放射性炭素による年代測定

生きている動植物が体内に ^{14}C を取り込む割合は、 ^{14}C の自然崩壊とバランスしている。つまり、生きている動植物の ^{14}C は平衡状態にあり、この崩壊率は一定である。木の場合、切られた時点から環境から切り離されて ^{14}C の吸収が止まり、崩壊のみが起こる。



仮定: 宇宙線によって地表に降り注ぐ中性子の数は、被測定対象が生きていた時代も今も終始一定

放射性元素 ^{14}C の半減期 = 5,568 年 $\gamma = \frac{\ln 2}{5568} = 1.245 \times 10^{-4} \text{ /年}$

放射性炭素による年代測定

木製の測定物が $t = 0$ で作られた(その時点で ^{14}C 供給停止)とする。 R_0 を木が生きているときの崩壊率とすると、

$$R_0 = -\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} = \gamma N_0 \quad \text{であり、一方、}$$

現在の崩壊率は、 $R(t) = -\frac{dN}{dt} = \gamma N(t) = \gamma e^{-\gamma t} N_0$ により与えられる。

これらから、被測定物の年齢は $t = \frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{R_0}{R(t)} \right]$ となる。



最初にこの年代測定法が適用されたのはウィンチェスター城の円卓(写真)であり、生きている木の崩壊率 $R_0 = 6.68$ と現在の崩壊率 $R(t) = 6.08$ から、円卓の年齢は

$$t = \frac{1}{1.245 \times 10^{-4}} \log \left[\frac{6.68}{6.08} \right] \approx 700 \text{ [年]} \text{ と求まる。}$$

アーサー王の時代よりずっと後に製作された。

ナッシュ均衡

ゲーム理論の解とは？

➡ プレイヤーがお互いに最適な戦略を採用している状態
「ナッシュ均衡」

John Forbes Nash Jr.: アメリカ人数学者。1994年にゲーム理論の経済学への応用に関する貢献によりノーベル経済学賞受賞

以下、身近な(?)ゲーム的状况である、「講義ゲーム」を考える。

プレイヤー: 講義をする「先生」と講義を受ける「学生」
先生の戦略: 「有意義な講義をする」と「退屈な講義をする」
学生の戦略: 「真剣に聞く」と「寝る」

講義ゲームの利得

- ◆ 先生が「有意義な講義をする」のは準備がとても大変で、2点マイナス。「退屈な講義をする」は0点。
- ◆ 先生は、学生が「真剣に聞く」と嬉しくなり、3点プラス。一方、学生が「寝る」と先生は悲しくなり、1点マイナス。
- ◆ 学生は「有意義な講義」を聞くと嬉しくなり、1点プラス。「退屈な講義」を聞くのは苦痛で、3点マイナス。
- ◆ 学生は講義の内容によらず、「寝る」と体力・知力回復(?)で3点プラス。

利得行列

(先生の利得, 学生の利得)の形で整理したもの

		学生	
		真剣に聞く	寝る
先生	有意義な講義	① (1, 1)	② (-3, 3)
	退屈な講義	③ (3, -3)	④ (-1, 3)

講義ゲームの利得行列は、プレイヤー2名で各々の戦略も2つなので、2x2の形となる。

- ① 先生が有意義な講義をし、学生は真剣に聞く場合
先生の利得: 準備が大変で2点マイナスだが、学生が真剣に聞いて嬉しいので3点プラス、結局プラス1点。
学生の利得: 有意義な講義を聞いてプラス1点。

利得行列

- ② 先生が有意義な講義をし、学生は寝た場合
先生の利得: 準備が大変で3点マイナス、学生が寝て悲しいので-1点、計-3点。
学生の利得: 寝て回復するので+3点。
- ③ 先生が退屈な講義をし、学生は真剣に聞いた場合
先生の利得: 準備には消費せず、学生が真剣に聞いて嬉しいので+3点。
学生の利得: 退屈な講義で苦痛なので-3点。
- ④ 先生が退屈な講義をし、学生は寝た場合
先生の利得: 準備には消費せず、学生が寝て悲しいので-1点。
学生の利得: 寝て回復するので+3点。

ナッシュ均衡の解釈

ナッシュ均衡 = プレーヤーがお互いに最適な戦略を採用している状態



相手の戦略に対し、自分が今とは別の戦略を採用しても、自分の利得がより大きくならない状態

つまり、ナッシュ均衡とは、プレーヤーがお互いに最適反応を取り合っている状態

① のとき、**学生**が「真剣に聞く」から「寝る」に戦略を変えたとする。

学生の利得は1から3に増加。つまり、先生の「有意義な講義をする」に対する学生の「真剣に聞く」は、最適反応ではない。

講義ゲームのナッシュ均衡

② のとき、**先生**の戦略を「退屈な講義をする」に変更

先生の利得：準備が不要で、学生の寝る戦略に対し、 $-3 \rightarrow -1$ 点となり、2点増える。

③ 先生の退屈な講義に対し、**学生**は「寝る」に変更

学生の利得： $-3 \rightarrow +3$ 点と増える。

④ 先生が退屈な講義をし、学生は寝た場合で、

先生の戦略を「有意義な講義」に変更：
→ **先生利得**は、準備を要するので3点減る。

学生の戦略を「真剣に聞く」に変更：
→ **学生利得**は、起きて退屈な講義を聞いて6点減る。

自分の利得がより大きくならない状態 = ナッシュ均衡
→ ④がプレーヤーが最適状態を取り合っている状態

まとめ

- ✓ 社会現象や自然現象の本質を抽出し、単純化・抽象化して数式で表現することを「モデル化」という。
- ✓ モデル化して数式に乗せられれば、その現象の性質を数学を使って明らかにしたり、未来の予測も可能となる。
- ✓ 実際の現象をより詳細に説明できるよう、必要に応じて応じてモデルを精密化していくことが行われる。が・・・
- ✓ 自然科学では、モデルとして微分方程式が登場する場面が多い。(自然の法則は、微分方程式で書かれることが多いので)
- ✓ モデルの正しさの程度は、実際の現象と比較することで評価できる。実際の現象の測定には誤差を含むので、その間を取り持つのが統計学である。