データサイエンス実践B 第12回

データの行列による表現とスパースモデリング基礎

小山翔子, 2022/7/25(月)

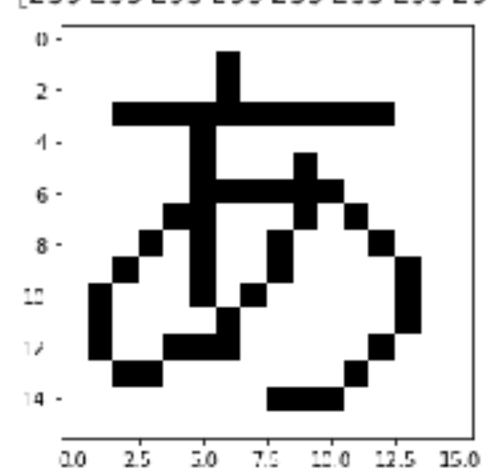
目次

- データの行列による表現
  - 行列って何？
  - 行列計算をやってみよう
  - 単位行列と逆行列
  - 連立方程式
- スパースモデリング基礎

```python
with open('gray_img.png', "wb") as f:
    f.write(img2)

img = cv2.imread('gray_img.png', cv2.IMREAD_ANYDEPTH)
plt.imshow(img, 'gray')
print('ビット深度:', img.dtype)
print('画像サイズ(画素数):', img.shape)
print('画像データを数値として書き出し:\n', img);
```

```
ビット深度: uint16
画像サイズ(画素数): (16, 16)
画像データを数値として書き出し:
 [[255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0   0   0   0   0   0 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255   0   0 255 255 255   0 255   0 255 255 255 255]
 [255 255 255   0 255   0 255 255   0 255 255 255   0 255 255 255]
 [255 255   0 255 255   0 255 255   0 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255 255   0 255   0 255 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255   0   0   0 255 255 255 255 255   0 255 255 255]
 [255 255   0   0 255 255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255 255 255   0   0   0 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]]
```



次回：観測ビッグデータと画像化

目次

- データの行列による表現
    - **行列って何？**
    - 行列計算をやってみよう
    - 単位行列と逆行列
    - 連立方程式
- スパースモデリング基礎

行列って何？

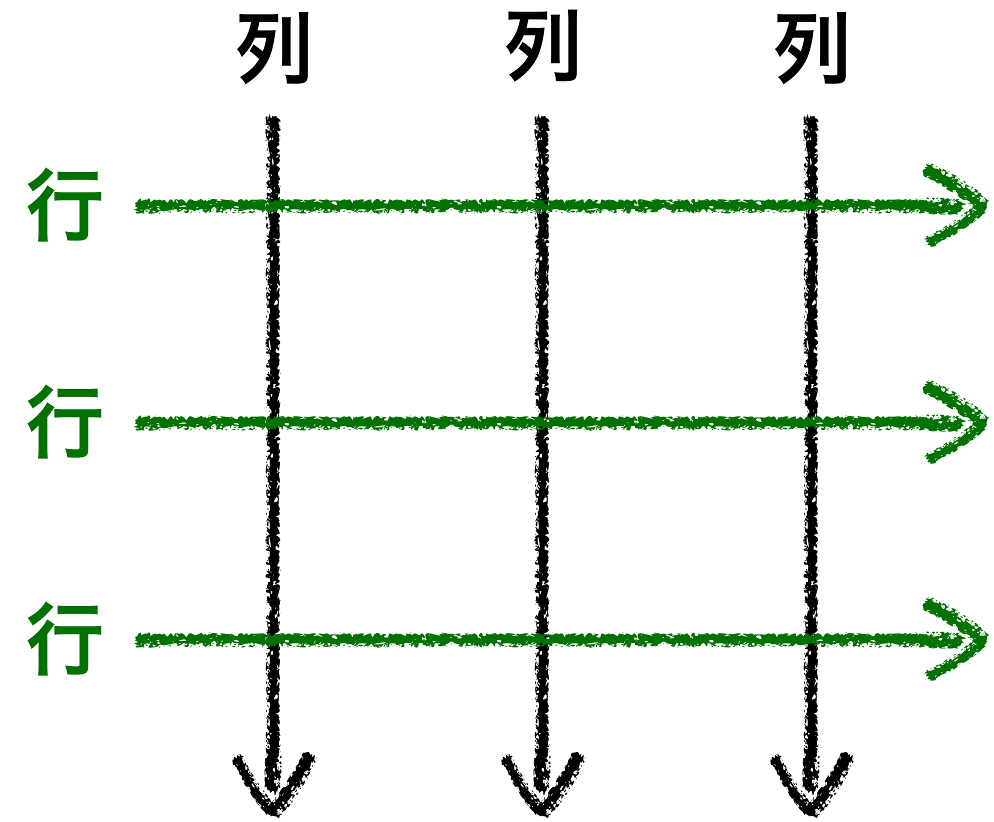
ラーメン屋さんや窓口の行列は英語でqueue
数学の行列は英語でmatrix、全く別物

行列の例

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \\ 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

3行3列の行列

3x3の行列



$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2行2列の行列

2x2行列

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2行1列の行列

2x1行列

行列の例

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \\ 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}
$$

3行3列の行列

3x3の行列

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}
$$

2行2列の行列

2x2行列

$$
\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

2行1列の行列

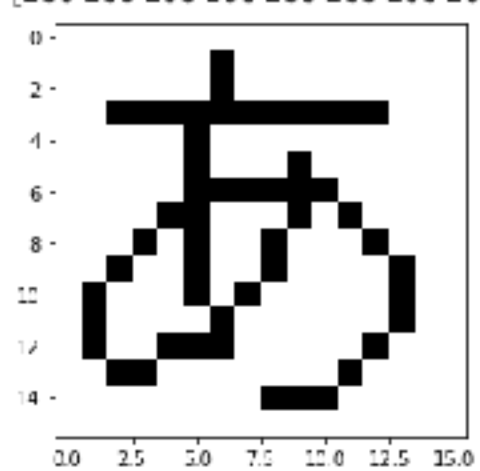
2x1行列

第7回

```
with open('gray_img.png', "wb") as f:
    f.write(img2)

img = cv2.imread('gray_img.png', cv2.IMREAD_ANYDEPTH)
plt.imshow(img, 'gray')
print('ビット深度:', img.dtype)
print('画像サイズ(画素数):', img.shape)
print('画像データを数値として書き出し:\n', img);
```

```
ビット深度: uint16
画像サイズ(画素数): (16, 16)
画像データを数値として書き出し:
 [[255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0   0   0   0   0   0 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255   0   0 255 255 255   0 255   0 255 255 255 255]
 [255 255 255   0 255   0 255 255   0 255 255 255   0 255 255 255]
 [255 255   0 255 255   0 255 255   0 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255 255   0 255   0 255 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255   0   0   0 255 255 255 255 255   0 255 255 255]
 [255 255   0   0 255 255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255 255 255   0   0   0 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]]
```



16行16列の行列

16x16行列

画像データも行列として処理

行列の例

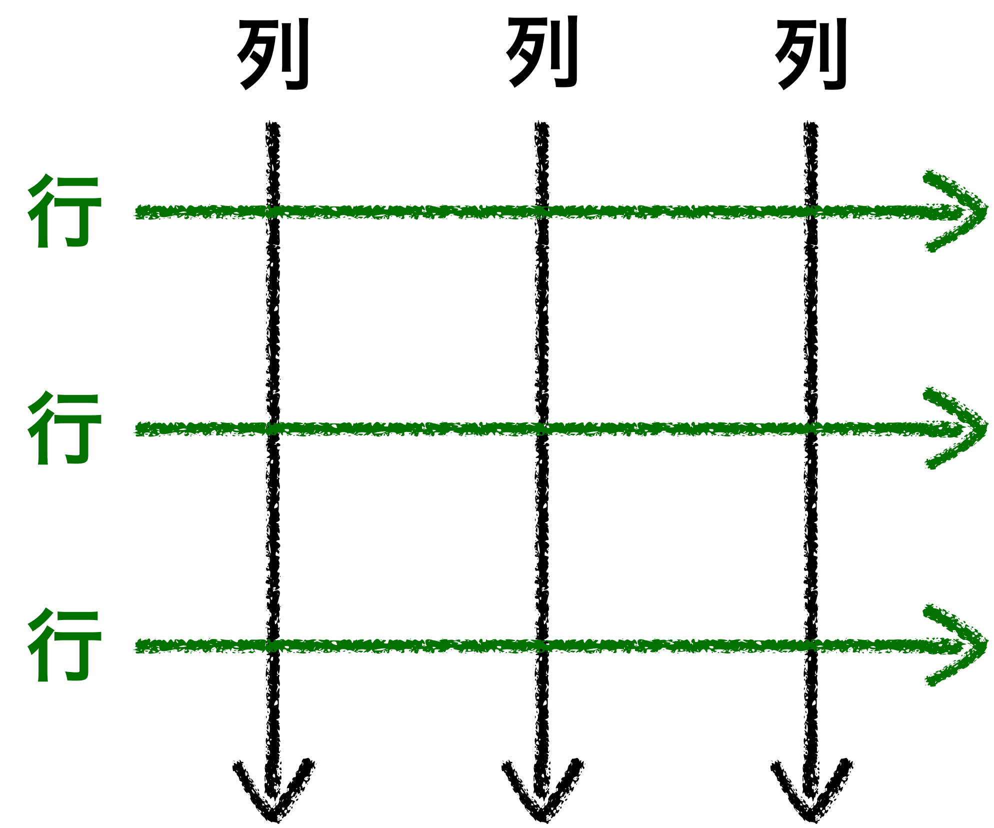
(1,3)成分

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \\ 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

(3,1)成分

3行3列の行列

3x3の行列



$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2行2列の行列

2x2行列

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2行1列の行列

2x1行列

行列表現の例

醤油ラーメン 800円 450 kcal | **豚骨ラーメン 700円 400 kcal**

トッピング 卵 100円 150 kcal | **もやし 50円 30 kcal**

$$\begin{array}{rc} & \text{ラーメン} \\ & \begin{array}{cc}\text{醤油} & \text{豚骨} \\ \downarrow & \downarrow\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{値段}\rightarrow \\ \text{カロリー}\rightarrow\end{array} & \begin{pmatrix} 800 & 700 \\ 450 & 400 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{トッピング} \\ \begin{array}{cc}\text{卵} & \text{もやし} \\ \downarrow & \downarrow\end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 150 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

単位は書かない

同じ行に同じ単位の数を書くことが多い

目次

- データの行列による表現
  - 行列って何？
  - **行列計算をやってみよう**
  - 単位行列と逆行列
  - 連立方程式
- スパースモデリング基礎

行列の足し算

醤油ラーメン 800円 450 kcal　豚骨ラーメン 700円 400 kcal

トッピング 卵 100円 150 kcal　もやし 50円 30 kcal

$$\begin{pmatrix} 800 & 700 \\ 450 & 400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 150 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 & 750 \\ 600 & 430 \end{pmatrix}$$

行列のかけ算①

醤油ラーメン 800円 450 kcal　豚骨ラーメン 700円 400 kcal
8人でお店に行って醤油ラーメンを５杯、豚骨ラーメンを3杯注文した時
値段の合計とカロリーの合計はいくらか？

$$\begin{pmatrix} 800 & 700 \\ 450 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \times 5 + 700 \times 3 \\ 450 \times 5 + 400 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6100 \\ 3450 \end{pmatrix}$$

行列のかけ算②

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

2x3の行列　　　　　　　3x4の行列

ここの数が等しくないと行列のかけ算はできない

行列のかけ算③

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

2x3の行列　　**3x4の行列**

$$= \begin{pmatrix} 3\times(-2)+2\times(-1)+5\times 1 & 3\times 1+2\times 4+5\times(-2) & 3\times 0+2\times 1+5\times(-1) & 3\times(-3)+2\times 2+5\times 6 \\ (-1)\times(-2)+1\times(-1)+3\times 1 & (-1)\times 1+1\times 4+3\times(-2) & (-1)\times 0+1\times 1+3\times(-1) & (-1)\times(-3)+1\times 2+3\times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 25 \\ 4 & -3 & -2 & 23 \end{pmatrix}$$

2x4の行列

1つ目の行列の行x２つ目の行列の列、の行列サイズになる

行列の入れ替え①

$$\overset{\textsf{A}}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\textsf{B}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\textsf{B}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} \overset{\textsf{A}}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$$

AB≠BA

行列の入れ替え②

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

AB=BA：可換行列

練習問題1

$$\begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

練習問題1 (答)

$$\begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 22 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -15 & -36 \end{pmatrix}$$

目次

- データの行列による表現
  - 行列って何？
  - 行列計算をやってみよう
  - **単位行列と逆行列**
  - 連立方程式
- スパースモデリング基礎

単位行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

:2x2の単位行列
どんな行列に掛け算しても行列の成分が変わらない

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AE = A$$

$$5 \times 1 = 5$$

逆行列

$$XX^{-1} = X^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2つの行列を掛け合わせて単位行列になるとき、行列X^{-1}は行列Xの逆行列という

以下の式で行列Aを求めたい。両辺に左右から行列Xの逆行列を掛ければAが求まる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 14 & 19 \end{pmatrix}$$

行列X

❎行列X^{-1}

❎行列X^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5x=3のxを求めるには左右から1/5を掛ければ良いのと同様の作業

$$A = X^{-1} \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 14 & 19 \end{pmatrix}$$

逆行列の求め方

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ は

$$\frac{1}{\boxed{ad - bc}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ となる

行列式
determinant

ただし $ad \neq bc$ の時

例：

X= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列X^{-1}は $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

X^{-1}がXの逆行列になっているかのたしかめ

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}13&18\\14&19\end{pmatrix}$$

行列X

❎行列X^{-1}

❎行列X^{-1}

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

逆行列を使って行列Aを求める

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 14 & 19 \end{pmatrix}$$

行列X

❎行列X^{-1}

❎行列X^{-1}

$$A = X^{-1} \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 14 & 19 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 14 & 19 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

練習問題２

逆行列を使って、次の式を満たす2x2行列Aを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A$$

練習問題２

逆行列を使って、次の式を満たす2x2行列Aを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} A$$

両辺に左からこの逆行列 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ を掛ければ良い

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

目次

- データの行列による表現
  - 行列って何？
  - 行列計算をやってみよう
  - 単位行列と逆行列
  - **連立方程式**
- スパースモデリング基礎

連立方程式①

Aさんは鉛筆3本と消しゴム2個を買って310円支払い、Bさんは鉛筆4本と消しゴム3個を買って440円支払った。鉛筆1本と消しゴム1個の値段をそれぞれ求めよ。

鉛筆1本をx円、消しゴム1個をy円とすると、

$$3x + 2y = 310 \quad \cdots ①$$

$$4x + 3y = 440 \quad \cdots ②$$

① x 3 - ② x 2　より

$$x = 50, y = 80$$

連立方程式②

Aさんは鉛筆4本と消しゴム2個を買って400円支払い、Bさんは鉛筆6本と消しゴム3個を買って600円支払った。鉛筆1本と消しゴム1個の値段をそれぞれ求めよ。

鉛筆1本をx円、消しゴム1個をy円とすると、

$$4x + 2y = 400 \quad \cdots ①$$

$$6x + 3y = 600 \quad \cdots ②$$

① x 3 - ② x 2　を計算すると、両方とも

$$12x + 6y = 1200$$ となる

未知数2つに対して式は1つ

→解不定、不良設定問題(ill-posed problem)、劣決定問題

e.g., x=50 y=100, or x=60 y=80

連立方程式を行列で表す

①

$$3x + 2y = 310$$
$$4x + 3y = 440$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 440 \end{pmatrix}$$

行列X　**未知**

❎行列X^{-1}　❎行列X^{-1}

左から逆行列をかければ
x,yを求めることができる

左辺はX^{-1}X=E

②

$$4x + 2y = 400$$
$$6x + 3y = 600$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}$$

行列X

解不定

この時逆行列は存在しない
行列式 4・3 - 2・6=0

逆行列をかけて連立方程式の解を求める

①

$$3x + 2y = 310$$
$$4x + 3y = 440$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{行列}X} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{未知}} = \begin{pmatrix} 310 \\ 440 \end{pmatrix}$$

❎行列X^{-1} ❎行列X^{-1}

左から逆行列をかければ
x,yを求めることができる

左辺は$X^{-1}X=E$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 310 \\ 440 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \times 310 - 2 \times 440 \\ -4 \times 310 + 3 \times 440 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

方程式の数<未知数の数

不良設定問題（解不定）を解くには？

②

$$4x + 2y = 400$$

$$6x + 3y = 600$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \end{pmatrix}$$

未知数

事前知識を利用する

例えば条件を一つ追加して、

$|x| + |y|$ が最小になるようなx, yを探す、

という問題であれば解くことができる

$\rightarrow x = 100, y = 0$

→スパースモデリング

各行列の成分と未知数の数がもっと増えても、方程式の数＜未知数の数では解けない

そこで未知数のうちほとんどがゼロをとる=スパース性を持つ

と仮定して未知数の数を減らすことができると方程式解を求めることが可能

方程式の数<未知数の数

不良設定問題（解不定）を解くには？

②

$$4x + 2y = 400$$

$$6x + 3y = 600$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{未知数}} = \begin{pmatrix} 200 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

事前知識を利用する

例えば条件を一つ追加して、

$|x| + |y|$ が最小になるようなx, yを探すという問題にする

→L1ノルム最小化によるスパース解推定

$$\arg\min \|\mathbf{x}\|_1 \ \underset{\text{Such that}}{\mathrm{s.t.}} \ \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$ と書く

$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ となるような $\|\mathbf{x}\|_1 = |x| + |y|$ を最小とする解(の集合)を探せ、という意味

他にも、L2ノルム最小化によるスパース解推定の場合は、$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

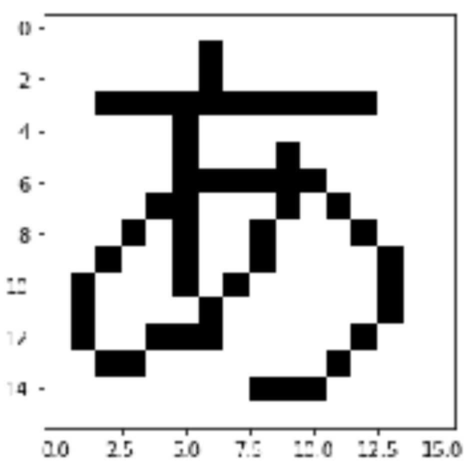
次回：観測ビッグデータと画像化

第7回

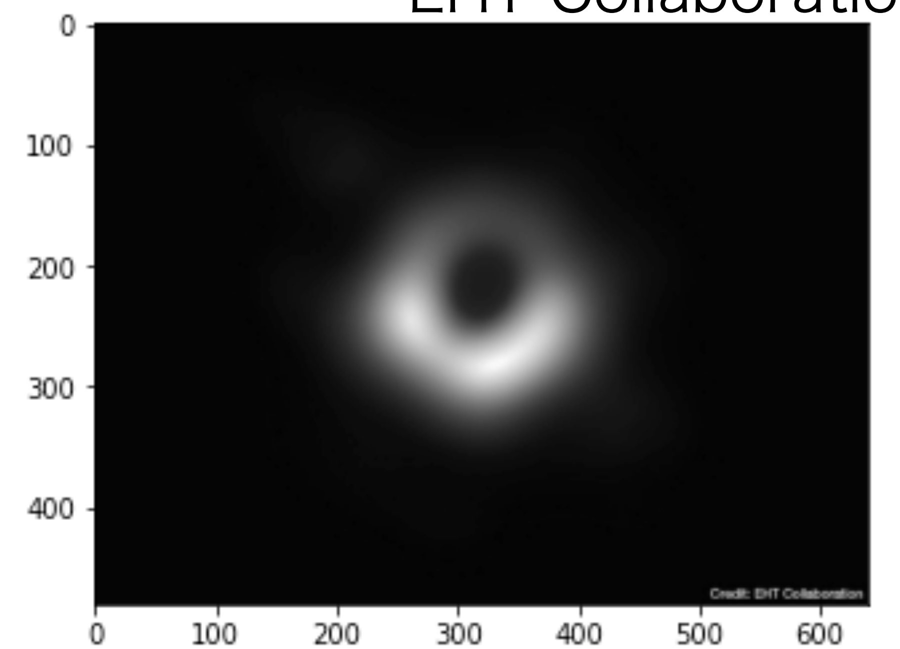
```
with open('gray_img.png', "wb") as f:
    f.write(img2)

img = cv2.imread('gray_img.png', cv2.IMREAD_ANYDEPTH)
plt.imshow(img, 'gray')
print('ビット深度:', img.dtype)
print('画像サイズ(画素数):', img.shape)
print('画像データを数値として書き出し:\n', img);
```

```
ビット深度: uint16
画像サイズ(画素数): (16, 16)
画像データを数値として書き出し:
 [[255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255   0   0   0   0   0   0 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255   0   0 255 255 255   0 255   0 255 255 255 255]
 [255 255 255   0 255   0 255 255   0 255 255 255   0 255 255 255]
 [255 255   0 255 255   0 255 255   0 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255 255   0 255   0 255 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255 255 255   0 255 255 255 255 255 255   0 255 255]
 [255   0 255 255   0   0   0 255 255 255 255 255   0 255 255 255]
 [255 255   0   0 255 255 255 255 255 255 255   0 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255 255 255   0   0   0 255 255 255 255 255]
 [255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255]]
```



EHT Collaboration



画像データも実は行列

ブラックホールの画像化にもスパースモデリングが使われている

(クラスタリングも使われている)