数値解析：第 9 回レポート課題

担当教員：劉雪峰

1　固有値の計算

行列 A は以下のように定義される。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

プログラミングによって、以下の問題を解いてください。

1) A の最大固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。
2) 絶対値が一番小さいである A の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。【ヒント：A の最小固有値の逆は A の逆行列の最大固有値となる。】
3) A の 3.1 に近い固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。【ヒント：A の 3.1 に近い固有値と $A - 3.1I_5$ の固有値の中で絶対値が最小となる固有値の関係を利用しなさい。】

真の固有値と固有ベクトルを λ、x と書いておく。べき乗法による固有値と固有ベクトルを計算するとき、毎回の計算で求められた近似固有値 $\lambda^{(k)}$ と近似固有ベクトル $x^{(k)}$ の誤差を $\mathrm{Err}_1 := \|x^{(k)} - x\|_2$, $\mathrm{Err}_2 := |\lambda - \lambda^{(k)}|$ とする。計算回数 k と $\log(\mathrm{Err}_1)$、k と $\log(\mathrm{Err}_2)$ の関係図を描きなさい。